**Théorèmes des opérations sur les limites :**

Si $l \neq 0$ alors : $l \times \infty = \infty$ et $\frac{l}{0} = \infty$ .

$\forall\ l \in \mathbb{R}\ : \frac{\infty}{l} = \infty$ ; $\frac{l}{\infty} = 0$ et $\infty \times \infty = \infty$

**Les formes indéterminées** :

$0 \times \infty$ ; $\frac{\infty}{\infty}$ ; $\frac{0}{0}$ ; $(+\infty)+(-\infty)$

**Exercice 1 :**

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^4$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2}x^3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4+3x+1$; $\lim\limits_{x\to2} 3x^2-2x+7$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+3x^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2-2\right)x-7x^2$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x^3+4x\right)^2$

**Exercice 2 :**

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{2x^4-1}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{x^4+x^3-1}$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-\sqrt{2}}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2+1\right)\left(3x^2-1\right)}{\left(x^3-1\right)\left(2x+6\right)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-2x^2+1}{2x^4+x^3-1}$ ;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(x^3+1\right)\left(x^2-1\right)}{x^4-x^2+x+5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(x^2+2x\right)-3x^3+2}{x^3+2x^2+1}$;

**Exercice 3 :**

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$ ; $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}$ ; $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^3-5x+4}$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-x-2}{x^3-x^2-x+1}$

**Exercice 4 :**

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ; $\lim\limits_{x\to2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{4x+1}}$

**Exercice 5 :**

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}-2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+x$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-3}+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

**Exercice 6 :**

On donne une fonction $u$ définie sur $]0;+\infty[$ et telle que pour tout $x$ de $[1;+\infty[$ , $0 \leq u(x) \leq x$ .

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{u(x)}{x^2}.$$

Montrer que si $x \geq 1$ ; $\left|f(x)-1\right| \leq \frac{1}{x}$.

Que peut-on en déduire sur la limite de $f$ en $+\infty$ ?

**Exercice 7 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = \sqrt{x^2+1}-(x+1)$

1) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{x}$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} - 1$

puis, vérifier que : $1+\sqrt{x^2+1} \geq 2$

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $\left|g(x)+1\right| \leq \frac{1}{2}|x|$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

**Exercice 8 :**

On définit $f$ sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+3x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x > 0$ , on a :

$9x^2 \leq 9x^2+3x+1 \leq (3x+1)^2$

2. En déduire que pour tout réel $x > 0$ :

$3 \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x}$

3. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$

$f$ est une fonction numérique dont l'expression est :

$$f(x) = ax + \frac{2}{x-b}$$

Déterminer $a$ et $b$ sachant que :

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 11$

**Exercice 9 :**

Soit $n$ est un entier naturel Calculer suivant les valeurs de $n$ , les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^n-7x^2-2x\right)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(nx^2-7x^2-2x+1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^n-2x^2+1}{2x^4+x^3-1}$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-2x^2+1}{2x^n+x^3-1}$

*M. Said CHERIF* : Professeur de Mathématique au Lycée Technique Maghreb Arabe OUJDA

**Exercice 1 :** Pour chacune des fonctions $f$ , $g$ et $h$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous, indiquer le nombre de solutions de l'équation proposée, en précisant pour chacune d'elles un intervalle auquel elle appartient.

1. $f(x) = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-5$ ‖ $-2$ | ↘ | $-\infty$ |

2. $g(x) = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-\infty$ |

3. $h(x) = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $3$ | ↘ | $-9$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ |

**Exercice 2 :**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

1. Dresser le tableau de variation de $g$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $\alpha$ et vérifier que $\alpha \in ]3,10;3,11[$
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**Exercice 3 :**

On considère la fonction $h$ définie par :

$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

1. Dresser le tableau de variation de $h$.
2. Pour $k$ réel donné, étudier le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $h(x) = k$.
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 8$ a une solution unique $\alpha$. Donner un encadrement de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

**Exercice 4 :**

$f$ est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \sqrt{x} + x$.

1. Donner le sens de variation de $f$ sur $[0 ; +\infty[$, et dresser le tableau de variation de $f$.
2. Calculer $f(3)$ et $f(4)$. En déduire que l'équation $f(x) = 5$ admet une seule solution $\alpha$. Encadrer $\alpha$ par deux entiers consécutifs.
3. Avec la calculatrice, déterminer un encadrement de $\alpha$, d'amplitude $10^{-1}$.

**Exercice 5 : Deux méthodes de résolution**

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 112.$$

Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ .

**Première partie**

a) Calculer $f'(x)$ ; étudier son signe.et dresser le tableau de variation de $f$

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions.

c) Avec la calculatrice, donner l'arrondi au dixième ou la valeur exacte de chaque solution.

d) En déduire le signe de $f$.

**Deuxième partie**

a) Calculer $f(2)$

b) Trouver trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout réel $x$ : $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d) En déduire le signe de $f(x)$.

**Exercice 6 :**

1. Soit $g$ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$

a) Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.
Etudier le sens de variation de $g$ et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[20 ; 40]$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.

2. Soit $f$ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

On prendra 1cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 20 en ordonnée.

a) Déterminer la limite de $f$ en 0 et en $+\infty$.

b) Démontrer que :

Pour tout $x$ de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

où $g$ est la fonction définie en 1).

c) Etudier les variations de $f$.

d) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à C.

e) Construire C et D sur le même graphique.

f) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 130$ et donner les valeurs approchées de chacune des solutions à l'unité près.

# Série des exercices 1 : Continuité d'une fonction numérique

**Exercice 01 :**
Calculer les limites suivantes si elles existent :

1) $\lim_{x\to+\infty} 4x^2-x+5$ ; 2) $\lim_{x\to-\infty} -2x^2+x-7$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{4x}$ ; 4) $\lim_{x\to1} \frac{3x^2-x-2}{x-1}$

5) $\lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$ ; 6) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-2x\right)$

**Exercice 02 :** Soit $f$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^2-1} & ; \ x\neq2 \\ f(2)=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

Étudier la continuité de $f$ en $x_0=2$

**Exercice 03 :** On considère la fonction $g$, définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\frac{x^2-1}{1-2x} & ; \ x\geq0 \\ g(x)=3-x^2 & ; \ x<0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de $g$ en $x_0=0$

**Exercice 04 :** Justifier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle $I$ :

1) $f(x)=\left(x^2-5\right)^4$; $I=\mathbb{R}$ // 2) $f(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}$; $I=\mathbb{R}^*$

3) $f(x)=\left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^2$ ; $I=\left]1;+\infty\right[$

4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $I=\left]-\infty;0\right]$ / 5) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$; $I=\mathbb{R}$

**Exercice 05 :** $f$ est la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2+x-3}{x-1} & ; \ si\ x<1 \\ \frac{\sqrt{5x-1}-2}{x^2-1} & ; \ si\ x>1 \\ \frac{5}{8} & ; \ si\ x=1 \end{cases}$$

1) Montrer que $f$ est continue à droite en 1.
2) Est-ce que $f$ est continue en 1 ?

**Exercice 06 :** $f$ est la fonction définie sur $\left[-1;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^3+1}-3}{x-2} & ; \ si\ x\neq2 \\ m & ; \ si\ x=2 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de $m$ pour que $f$ soit continue en 2.

**Exercice 07 :** 1) Montrer que l'équation $(E)$ admet au moins une solution dans $I$, dans chaque cas :

a. $(E)$: $x^5-2x^3+x-4=0$ ; $I=[-1;2]$
b. $(E)$: $\sqrt{x^3+1}-2x=0$ ; $I=\left]0;1\right[$

2) Montrer que l'équation $(E)$ admet une unique solution dans $I$, dans chaque cas :

a. $(E)$: $x^3+5x=4$ ; $I=[-1;2]$
b. $(E)$: $x\sqrt{x}+x=1$ ; $I=\left]0;1\right[$

3) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-4x^2+4x-1$$

1. Étudier les variations de $f$.
2. Déduisez que l'équation $f(x)=0$ admet une solution $\alpha$ dans $\left]2;3\right[$.
3. Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0.25.

**Exercice 08 :** Soit dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^3-3x^2+1=0 \quad (E)$$

1) Montrer que l'équation $(E)$ admet une solution dans l'intervalle $\left]-1;0\right[$.
2) On pose $f(x)=x^3-3x^2+1$, pour $x\in\mathbb{R}$
   a- Calculer $f(0)$ et $f(3)$
   b- Peut-on appliquer le T.V.I sur $f$ dans $[0;3]$ ?
   c- Calculer $f(2)$ et en déduire que l'équation $(E)$ admet deux autres solutions.
3) Donner un encadrement d'amplitude 0.5 dans chacune des trois solutions.

**Exercice 09 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}+x^2-4$$

1) Montrer que $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
2) En déduire que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même.
3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\left[0;+\infty\right[$ et que $1.6<\alpha<1.7$

**Exercice 10 :**
$g$ est définie sur $I=\left[1;+\infty\right[$ par : $g(x)=x^2+2x-4$

1) Montrer que $g$ est continue et strictement croissante sur $I$.
2) En déduire que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur l'intervalle $J$ à déterminer vers $I$.
3) Déterminer $g^{-1}(x)$, $\forall x\in J$ .

**Exercice 11 :**
$h$ est définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par : $h(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

1) Montrer que $h$ admet une fonction réciproque $h^{-1}$ définie sur l'intervalle $J$ à déterminer.
2) Déterminer $h^{-1}(x)$, $\forall x\in J$ .